අවකලනය / ප්‍රස්ථාර / යෙදුම්

(1) C නියතයක් වූ විට $f(x) \equiv 3x^5 - 5x^3 + C$ යැයි දී ඇත්නම් $y = f'(x) \equiv 15x^2(x^2 - 1)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. $f'(x)$ හි උපරිම හා අවම අගයන් ප්‍රස්තාරයේ පැහැදිලි ව දක්වන්න. ඒ නයින්, $f(x)$ ට ඇත්තේ එකම එක උපරිමයක් හා එකම එක අවමයක් බව අපෝහනය කරන්න. තව ද,

i) x සමග $f(x)$ ට වැඩිවන්නේ $|x| > 1$ ම නම් පමණක් බවත්

ii) $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ ලක්ෂ්‍ය හතරක දී පමණක් ඇඳි ස්පර්ශකය $x + y = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර වන බවත් මේ ලක්ෂ්‍ය සියල්ලම $|x| < 1$ පරාසයේ පවතින බවත් අපෝහනය කරන්න. (1975)
[$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ ඇඳීම අනවශ්‍ය බව සලකන්න.]

(2) $y = (3x^2 - 3) / (6x - 10)$ වක්‍රය මත උපරිම සහ අවම ලක්ෂ්‍ය (k, k) ද $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ ද ආකාරයෙන් වන බව පෙන්වන්න. මෙම වක්‍රයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. එම රූපයේම $xy = 1$ සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් ද අඳින්න. $3x^3 - 9x + 10 = 0$ සමීකරණයට එක තාත්ත්වික මූලයක් තිබෙන බවත් තාත්ත්වික මූල ඇත්තේ එයම පමණක් ඒ නයින් පෙන්වා එම මූලය -1 ට අඩු බව ද පෙන්වන්න. (1976)

(3) i) $3ay^2 = x^2(x+a)$ වක්‍රයට $(2a, 2a)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ℓ ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. ℓ ට වක්‍රය යළි හමුවන ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයත් ℓ ම බව පෙන්වන්න.

ii) $t \neq 0$ යනු පරාමිතිය ද $a > 0$ ද විට $x = at^2, y = a(t^3 - t^2)$ සමීකරණවලින් වක්‍රයක් අර්ථ දක්වෙයි. වක්‍රය මත ඕනෑම t ලක්ෂ්‍යයෙක දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. ඒ නයින්, වක්‍රය මත එක ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බවත් ඇත්තේ එම ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයම පමණක් බවත් එම ලක්ෂ්‍ය අවම ලක්ෂ්‍යයක් බවත් පෙන්වන්න. (1976)

(4) $y = f(x)$ ශ්‍රිතයට $x = a$ ලක්ෂ්‍යයේ දී i) උපරිමයක් ii) අවමයක් තිබීම සඳහා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතා කාණ්ඩයක් $\frac{dy}{dx}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. $x = 0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී

i) $y = x^3$ ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් නොමැති බවත්

ii) $y = x^4$ ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බවත් පෙන්වන්න.
$y = x^3$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් ඇඳ එම ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කරගනිමින් $y = x^4$ ශ්‍රිතයේ දළ මෙබඳු තර්කනයක් යෙදීමෙන් n හි ධන නිඛිල අගය සඳහා $y = x^{2n+1}$ ශ්‍රිතයේත් $y = x^{2n}$ ප්‍රස්තාරවල හැඩ පිළිබඳ අදහස් ඉදිරිපත් කරන්න. (1977)

(5) i) තල වක්‍රයක් මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයෙක ඛණ්ඩාංක $x = t^2$ ද $y = t^3$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබෙයි. මෙහි t යනු පරාමිතිය ද $t \neq 0$ ද වෙයි. P හි දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයට T හි දී x අක්ෂය හමු වෙයි. T හි දී PT ට ඇඳි ලම්බයට N හි දී y− අක්ෂය හමු වෙයි. $\frac{(ON)^2}{OT}$ යන්න P හි පිහිටීමෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ii) තල වක්‍රයක් (x, y) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර එම ලක්ෂ්‍යයේ දී එහි අනුක්‍රමණය $\frac{(y+1)x\sin x}{y}$ වෙයි. මේ කුලයේ වක්‍ර අතුරෙන් මූල ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නේ එකම එකක් පමණක් බව පෙන්වන්න. (1977)

(6) $y = \frac{3x^2}{x^2+4}$ ශ්‍රිතය මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය අඳින්න. $y = \frac{3}{4}x$ සරල රේඛාව $(2, \frac{3}{2})$ ලක්ෂ්‍යයේ දී මෙම වක්‍රය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. මෙම සරල රේඛාවෙනුත් වක්‍රයෙනුත් වට කෙරෙන වර්ගඵලය සොයන්න. (1977)

(7) $x = t$ යන්නෙන් අර්ථ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී $y = (x-4)e^x$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. ඉහත වක්‍රය මත කිසියම් ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව පෙන්වන්න. එම ලක්ෂ්‍යයේ දී x හි අගය ද සොයන්න. (1978)

(8) i) $y = \frac{x}{x^2+1}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න.

ii) ඒකාකාර තුනී ද්‍රව්‍යයක දී තිබෙන ප්‍රමාණයකින් විවෘත සිලින්ඩරාකාර බඳුනක් තැනීමට තිබෙයි. එයට තිබිය හැකි විශාලතම පරිමාව ඇත්තේ එහි ආධාරකයේ අරයට එහි උස සමාන විට බව පෙන්වන්න. (1978)

(9) $f(x) \equiv (x+5)^2(x^3-10)$ යන්නෙහි එකම එක අවම අගය $f(1)$ බවත් එකම එක උපරිම අගය $f(-5)$ බවත් පෙන්වන්න. $-3 < x, < -1$ සඳහා $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් ඇඳ $x = -2$ අසරේ දී $y = -162$ රේඛාව අනුබද්ධයෙන් $f(x)$ හි හැසිරීම විදහා දක්වන්න. (1979)

(10) $t \neq 0$ වූ පරාමිතිය t ද a යනු නියතයක් ද වන $x = at^2, y = at^3$ පරාමිතික සමීකරණ ඇසුරෙන් S වක්‍රයක් දෙනු ලැබෙයි. $p(at^2, at^3)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $3tx - 2y - at^3 = 0$ බව පෙන්වන්න. P හි දී ඇඳි ස්පර්ශකයට වෙනත් Q ලක්ෂ්‍යයක දී S හමුවන බව පෙන්වන්න. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ඒ නයින්, S ට අභිලම්බය ද වන සේ වූ S හි ස්පර්ශක දෙකක් තිබෙන බවත් එබඳු ස්පර්ශක ඇත්තේ දෙකක් ම පමණක් බවත් ඒවා පරාමිතිය $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක බවත් පෙන්වන්න. (1979)

(11) $y = f(x) \equiv \frac{3x-1}{(4x-1)(x+5)}$ නම්, $f(1)$ යනු $f(x)$ හි ස්ථාවර අගයක් බව පෙන්වා අනෙක් ස්ථාවර අගය සොයන්න. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ කටු සටහනක් අඳින්න.(1979 අතුරු)

(12) $y = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}$ නම්,

i) x සමඟ y වැඩි වන්නේ ii) x සමඟ y අඩු වන්නේ

x හි කවර පරාස තුළ දැයි සොයන්න. y හි උපරිම හා අවම අගයන් කවරේ ද? ඉහත සඳහන් වක්‍රයේත් $y = k$ රේඛාවේත් ඡේදනය සැලකීමෙන් $-2(3\sqrt{2}+4) < k < 2(3\sqrt{2}-4)$ නම්, $(k-1)x^2 - 3kx + 2(k-1) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නැති බව අපෝහනය කරන්න. (1980)

(13) i) $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. $-4 < k < 0$ සඳහා $x - 1 + \frac{1}{x+1} = k$ සමීකරණයට තාත්වික විසඳුම් නැති බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $t \neq 0$ විට, $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 3t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් වක්‍රයක් දෙනු ලැබෙයි. වක්‍රයේ "t ලක්ෂ්‍යයේ" දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. ඒ නයින්, වක්‍රය මත හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයා ඉන් කවරක් උපරිමයක් ද කවරක් අවමයක් ද යන්න නිර්ණය කරන්න. (1981)

(14) i) ව්‍යුත්පන්නය පරීක්ෂා කිරීමෙන්, $\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ හි උපරිම හා අවම අගයයන් ලබාගන්න.
$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් අඳින්න. $-1 < k < -\frac{1}{2}$ සඳහා $k(x-1)(x-4) - x = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් නැති බව අපෝහනය කරන්න.

ii) t යනු පරාමිතියක් විට $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{t}{1+t^2}$ සමීකරණය මගින් වක්‍රයට අර්ථ දක්වෙයි. වක්‍රය මත t ලක්ෂ්‍යයක දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d_2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. මෙ නයින්, වක්‍රය මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යත් ඒවායේ ස්වාභාවයත් සොයන්න. (1982)

(15) i) පළමු ව්‍යුත්පන්න පමණක් සලකා බැලීමෙන් $f(x) - \frac{(x-5)^3(4x-1)}{x+1}$ ශ්‍රිතයේ උපරිම හා අවම (5,0) ලක්ෂ්‍යය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

ii) $ay^2 = x^3$ වක්‍රය මත $P(at^2, at^3)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකය Q හි දී වක්‍රයට නැවත හමු වේ. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. O යනු මූල ද N යනු P සිට x– අක්ෂයට අඳින ලද ලම්බකයේ අඩිය ද R යනු PQ හා y– අක්ෂයේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ද නම් OQ හා RN x – අක්ෂයට සමාන ලෙස ආනතව ඇති බව සාධනය කරන්න. (1983)

(16) i) අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක උපරිම හා අවම අගයන් (පවතී නම්) එහි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සැලකීමෙන් නිර්ණය කරන්නේ කෙසේදැයි පැහැදිලි කරන්න. ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සැලකීමෙන් $\frac{x^3}{1+x^4}$ හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයා එහි වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ii) වක්‍රයක් $x = e^\theta \cos\theta$, $y = e^\theta \sin\theta$ සමීකරණය මගින් පරාමිතික ලෙස දී ඇත. පරාමිතිය θ වන P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. P වක්‍රය ඔස්සේ විචලනය වන විට OP සහ P හි දී ස්පර්ශකය අතර කෝණය නියතයක්ව පවතින බව පෙන්වන්න. O යනු ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යය වේ. (1984)

(17) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ යැයි ගනිමු. $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරය මගින් ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද ගෙනහැර දක්වමින් ඉහත ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් අඳින්න. තවද,

i) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද,

ii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා ඇත්නම්) ඛණ්ඩාංක ද,

iii) ස්පර්ශෝන් මුඛ ද ගෙන හැර දක්වමින්, $y = \frac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් ද අඳින්න. (1999)

(18) A, B හා C නගර තුනක් $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$, $AB = 15$ km හා $BC = 50$ km වන අයුරින් AB හා BC සෘජු මාර්ග දෙකකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A නගරය BC මාර්ගයේ D නම් ස්ථානයකට සම්බන්ධ කරමින් තවත් සෘජු මාර්ගයක් තැනීමට යෝජිත ව්‍යාපෘතියක් ඇත. මෝටර් රථයක් සඳහා DC කොටස මත 50 kmh^{-1} ක හා AD යෝජිත මාර්ගය මත 40 kmh^{-1} ක උපරිම වේගයන්ට අවසර ඇත. A නගරයේ සිට x km දුරින් D පිහිටා ඇත්නම් අවසර ඇති උපරිම වේගයන්ගෙන් මෝටර් රථය ගමන් කරනු ලබන්නේ යයි උපකල්පනය කරමින් D හරහා A සිට C තෙක් මෝටර් රථයක් ගමන් කිරීමට ගන්නා ලද සම්පූර්ණ කාලය T(x) පැය වලින් සොයන්න. 0 සිට 50 km තෙක් x වැඩි වන විට $\frac{dT}{dx}$ හි ලකුණ පරීක්ෂා කරන්න. A සිට C තෙක් කෙටිම කාලයකින් ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට මෝටර් රථයකට හැකිවන අයුරින් D සඳහා වඩා සුදුසුම ස්ථානය සොයන්න. (2000)

(19) A, B සහ C නගර තුන පිහිටා ඇත්තේ A සිට B දක්වා සහ A සිට C දක්වා වූ දුරවල් සමාන වන සේ ඇති සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල ය. B සිට C දක්වා දුර 12 km සහ A ඔස්සේ වූ උච්චය 16 km වේ. අවම නළ ප්‍රමාණයක් උපයෝගී කරගනිමින් A, B සහ C නගර තුනට ම නළ ජලය සැපයීම සඳහා A ඔස්සේ වූ උච්චය මත A සිට කොපමණ දුරකින් ළිඳක් පිහිටිය යුතු ද? (2001)

(20) ඝන ගෝලයකින් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන්නා වූ අක්ෂයක් සහිත සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් කපනු ලැබේ. සිලින්ඩරයේ පරිමාව ගෝලයේ පරිමාව මෙන් $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ට වඩා වැඩි විය නොහැකි බව සාධනය කරන්න. (2002)

(21) $y = \frac{2x}{1+x^2}$ යයි දී ඇත්නම් $\frac{dy}{dx} = 0$ වන සේ වූ x හි අගයයන් සොයන්න. y හි එම ස්ථාවර අගයයන්ගේ ස්වාභාවය ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නයේ හැසිරීම පමණක් සලකා බැලීමෙන් පරීක්ෂා කරන්න. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. (2003)

(22) සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෝස්ටරයක් එහි වමෙන් හා දකුණෙන් එක එකක් 6 cm ක් පළල තීරවලින් ද උඩින් හා යටින් එක එකක් 8 cm ක් පළල තීරවලින් ද වට වූ වර්ගඵලය 972 cm^2 ක සෘජුකෝණාස්‍ර මුද්‍රිත පෙදෙසක් ප්‍රදර්ශනය වන අයුරින් තැනිය යුතු වේ. අඩුතම වර්ගඵලය සහිත පෝස්ටරයේ මාන සොයන්න. (2004)

(23) සමචතුරස්‍ර පතුලක් සහිත එහෙත් පියනක් රහිත ධාරිතාව 256 cm^3 කින් යුත් සෘජුකෝණාස්‍ර පෙට්ටියක් සෑදිය යුතුව ඇත. පතුල සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ග සෙන්ටිමීටරයකට මෙන් 8 ගුණයක් සෘජුකෝණාස්‍ර පැති සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ග සෙන්ටිමීටරයකට වැය වේ නම්, වඩාත්ම ලාභදායි පෙට්ටියේ මාන සොයන්න. (2005)

(24) සංවෘත සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් එහි පරිමාව 1024π cm^3 වන පරිදි සෑදිය යුතුව ඇත. එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවමයක් කරනු ලබන සිලින්ඩරයේ අරය සොයන්න. (2006)

(25) P (at^2, at^3) ලක්ෂ්‍යයේ දී $ay^2 = x^3$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී නැවතත් වක්‍රයට හමු වේ. මෙහි a යනු නියතයකි. t ඇසුරෙන් Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (2007)

(26) C යනු $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ සහ $y = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන වක්‍රය යැයි ගනිමු. මෙහි a යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් ද, t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියක් ද වේ. C වක්‍රයට t_0 පරාමිතික අගය ඇති ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයෙහි සමීකරණ සොයන්න. $(-13a, 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වා අභිලම්බ හතරෙහි අඩිවල පරාමිතික අගයන් සොයන්න. (2008)

(27) $P\left(3, \frac{1}{5}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $y(1+x^2) = 2$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී නැවතත් වක්‍රය හමුවෙයි. Q හි බණ්ඩාංක සොයන්න. (2009)

(28) දෙන ලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන A(x) යන්න $A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි x , $(0 \le x \le l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ. ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක් වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, A(x) වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න. (2010)

(29) වක්‍රයක් $x = 3t$, $y = 3/t$ මගින දෙනු ලැබෙයි. මෙහි t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියකි. වක්‍රය $(3t, 3/t)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x + t^2y = 6t$ බව පෙන්වන්න. t විචලනය වන විට බණ්ඩාංක අක්ෂ හා මෙම ස්පර්ශකය මගින් සපර්යන්ත ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න. (2011)

(30) a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු. මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු. මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි. a හා b හි අගයයන් සොයන්න. a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න. ඒ නයින්, $2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

b) සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ්වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව $8192\ cm^3$ වෙයි. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග 4x cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත්කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය වන $A\ cm^2$ යන්න, $A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න. (2011)

(31) C නම් වක්‍රයක් $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබෙයි. C වක්‍රයට (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ බව පෙන්වන්න. (2012)

(32) a) පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සලකමින් $\frac{x^3}{x^4+27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y = \frac{x^3}{x^4+27}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, k හි කවර අගයන් සඳහා

$kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට

i) තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ දැයි,
ii) තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ දැයි,
iii) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ දැයි,
iv) තාත්ත්වික මූල නොතිබේ දැයි සොයන්න. මෙහි k තාත්ත්වික වෙයි.

b) AB = a හා BC = b (< a)සහිත ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. AP + PB හි දිග L(x) වෙයි. මෙහි DP = x වෙයි.

$L(x) = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{(a-x)^2+b^2}$ බව පෙන්වන්න.

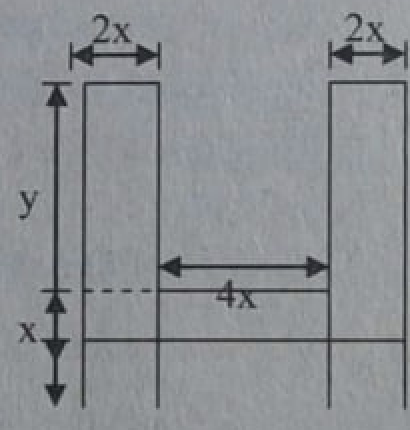
L(x) හි අවම දිග හා මෙම අවම දිගට අනුරූප P හි පිහටුම CD මත සොයන්න. L(x) හි උපරිම දිග ද සොයන්න. (2012)

(33) a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ යැයි ගනිමු. $x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = \frac{x(x^3+2)}{(x^3-1)}$ බව

පෙන්වා y = f (x) ප්‍රස්තාරයට (0, 0) හා $\left(-2^{\frac{1}{3}}, \frac{4^{\frac{1}{3}}}{3}\right)$ හි දී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පවතින

බව අපෝහනය කරන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් y = f (x) ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

b) මායිම සෘජුකෝණික ලෙස හමුවන සරල රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූප සටහනෙහි දක් වේ. ගෙවත්තේ මාන මීටරවලින් එහි දක්වා ඇත. ගෙවත්තේ වර්ගඵලය $800\ m^2$ බව දී ඇත. x ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර මීටරවලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය P යන්න $P = \frac{800}{x} + 10x$ මගින් දෙනු ලබන බව ද පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ 0 < x < 10 සඳහා පමණක් බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින්, ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න. (2013)



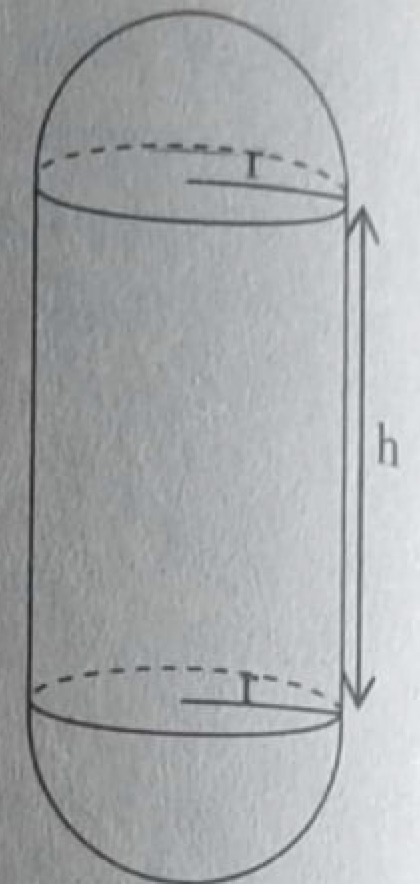
(34) $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයා $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(35) a) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \frac{8(1-x)(2x^2+3x+30}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන් මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි දළ සටහනක් අඳින්න. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x + 1)(x^2 + 3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

b) අරය මීටර r වූ කුහර ගෝල දෙකක්, එම අරයම සහිත උස මීටර h වූ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයකට රූපයේ දක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $36\pi\ m^3$ වේ. $h = \frac{108 - 4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.

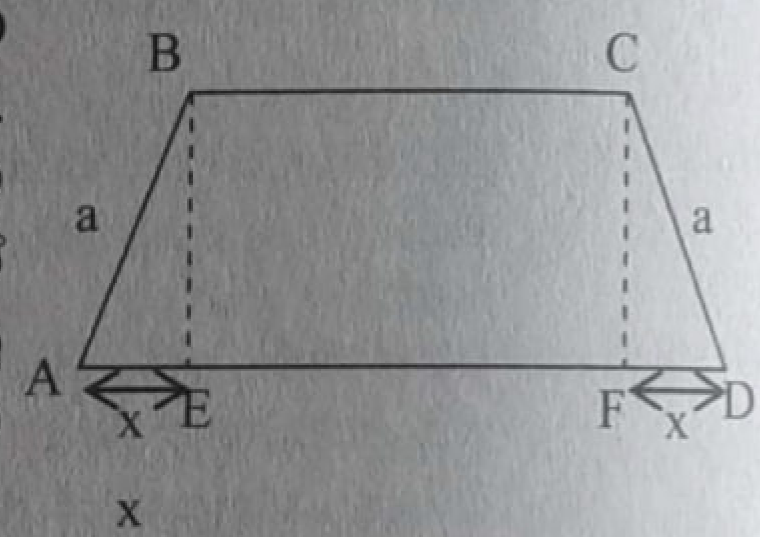


ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද, අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1 000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් c යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left[4r^2 + \frac{27}{r}\right]$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න. (2014)

(36) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. (2015)

(37) දී ඇති රූපයෙහි, ANCD යනු BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



ABCD ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය S(x), වර්ග සෙන්ටිමීටර්වලින් $S(x) = (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට S(x) උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න. (2015)